## Лабораторная работа по теме «Тема 1.7. Метод наименьших квадратов»

### **1.7.1. Вопросы, подлежащие изучению**

1. Постановка задачи аппроксимации.
2. Основные понятия: базисные функции, матрица Грама, система нормальных уравнений, критерий аппроксимации.
3. Матрица Грама для степенного базиса.
4. Правило построения системы нормальных уравнений и число уравнений в системе.
5. Алгоритм получения коэффициентов линейных и квадратичных аппроксимирующих функций.
6. Графическая иллюстрация метода МНК.
7. Формулы оценки качества аппроксимации для линейной и квадратичной функции.

### **1.7.2. Задание**

1. **Выбрать индивидуальное задание** из табл. 1.7-1 и табл. 1.7-2 для решения задачи аппроксимации методом наименьших квадратов**:**

* аппроксимируемую функцию f1 или f2 из табл. 1.7-1, заданную в предписанных узлах (при «ручном расчете» 4 точки);
* значения функции f1 или f2из табл. 1.7-2 в предписанных узлах.

1. **Выполнить линейную и квадратичную аппроксимацию**:

* составить систему нормальных уравнений и решить её;
* вычислить значения аппроксимирующих функций в узловых точках и сравнить их со значениями исходной функции;
* оценить погрешность.

1. **Построить график заданной функции** (по множеству точек) и отобразить на графике зависимости, полученные МНК.

### **1.7.3. Варианты задания**

Таблица 1.7-1

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **N варианта** | **Функция из табл. 1.7-2** | **Номера узлов из табл. 1.7-2** |
| 1 |  | 1,35,7,9,11,13 |
| 2 |  | 2,4,6,8,10,12,14 |
| 3 |  | 4,6,8,10,12,14 |
| 4 |  | 5,7,9,11,13,15 |
| 5 |  | 7,8,9,10,11,12,13 |
| 6 |  | 3,5,7,9,11,13,15 |
| 7 |  | 9,11,13,15,17,19 |
| 8 |  | 10,12,14,16,18,20 |
| 9 |  | 15,17,19,21,23,25 |
| 10 |  | 16,18,20,22,24,26 |
| 11 |  | 17,19,21,23,25,27 |
| 12 |  | 21,23,25,27,29,31 |
| 13 |  | 22,24,26,28,30,32 |
| 14 |  | 27,29,31,33,35 |
| 15 |  | 28,29,30,31,32,33 |
| 16 |  | 28,30,32,34,36 |
| 17 |  | 1,3,5,7,9,11 |
| 18 |  | 2,4,6,8,10,12 |
| 19 |  | 3,5,7,9,11,13 |
| 20 |  | 4,6,8,10,12,14 |
| 21 |  | 5,7,9,11,13,15 |
| 22 |  | 10,12,14,16,18,20 |
| 23 |  | 11,12,13,14,15,16,17 |
| 24 |  | 15,17,19,21,23,25 |
| 25 |  | 16,18,20,22,24,26 |
| 26 |  | 19,21,23,25,27,29 |
| 27 |  | 21,23,25,27,29,31 |
| 28 |  | 24,25,26,27,28,29,30 |
| 29 |  | 26,28,30,32,34,36 |
| 30 |  | 25,27,29,31,33,35 |

Таблица 1.7-2

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **-номер узла** |  |  |  |
| 1 | -15 | -1,15 | 1,25 |
| 2 | -14 | -0,506 | 1,594 |
| 3 | -13 | 0,236 | 2,056 |
| 4 | -12 | 0,88 | 2,44 |
| 5 | -11 | 1,256 | 2,577 |
| 6 | -10 | 1,266 | 2,366 |
| 7 | -9 | 0,91 | 1,81 |
| 8 | -8 | 0,286 | 1,006 |
| 9 | -7 | -0,436 | 0,124 |
| 10 | -6 | -1,06 | -0,64 |
| 11 | -5 | -1,416 | -1,116 |
| 12 | -4 | -1,406 | -1,206 |
| 13 | -3 | -1,03 | -0,91 |
| 14 | -2 | -0,386 | -0,326 |
| 15 | -1 | -0,356 | 0,376 |
| 16 | 0 | 1 | 1 |
| 17 | 1 | 1,376 | 1,376 |
| 18 | 2 | 1,386 | 1,406 |
| 19 | 3 | 1,03 | 1,09 |
| 20 | 4 | 0,406 | 0,526 |
| 21 | 5 | -0,316 | -0,116 |
| 22 | 6 | -0,939 | -0,64 |
| 23 | 7 | -1,296 | -0,876 |
| 24 | 8 | -1,286 | -0,726 |
| 25 | 9 | -0,91 | -0,19 |
| 26 | 10 | -0,266 | 0,634 |
| 27 | 11 | 0,476 | 1,576 |
| 28 | 12 | 1,12 | 2,44 |
| 29 | 13 | 1,496 | 3,056 |
| 30 | 14 | 1,506 | 3,326 |
| 31 | 15 | 1,15 | 3,25 |
| 32 | 16 | 0,526 | 2,926 |
| 33 | 17 | -0,196 | 2,524 |
| 34 | 18 | -0,82 | 2,24 |
| 35 | 19 | -1,176 | 2,244 |
| 36 | 20 | -1,66 | 2,634 |

### **1.7.4. Содержание отчета**

1. Индивидуальное задание.
2. Линейная и квадратичная аппроксимация:

* значения элементов матрицы Грама и столбцов свободных членов, представленные в табл. 1.7-3:

Таблица 1.7-3

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |  |  |
| 5 |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

* системы нормальных уравнений и их решения, аппроксимирующие функции;
* исходная функция и результаты аппроксимации и в узловых точках, представленные в табл. 1.7-4:



Таблица 1.7-4

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

* оценка погрешности (среднеквадратическое отклонение).

1. Графики исходной аппроксимируемой функции()и аппроксимирующих функций и .



1. Результаты аппроксимации, полученные с помощью математического пакета.

### **1.7.5. Пример выполнения задания**

**1. Задание для решения задачи аппроксимации**

Для решения задачи аппроксимации методом наименьших квадратов выберем функцию y(x), заданную следующей таблицей:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 |
|  | 8 | 3 | 1 | 2 | 5 |

1. **Линейная и квадратичная аппроксимация:**

* Вычислить и записать в табл. 1.7-3 элементы матрицы Грама и столбец свободных членов:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
| 0 | 2 | 8 | 16 | 4 | 8 | 16 | 32 |
| 1 | 3 | 3 | 9 | 9 | 27 | 81 | 27 |
| 2 | 4 | 1 | 4 | 16 | 64 | 256 | 16 |
| 3 | 6 | 2 | 2 | 36 | 216 | 1296 | 72 |
| 4 | 7 | 5 | 35 | 49 | 343 | 2401 | 25 |
|  | 22 | 19 | 76 | 114 | 658 | 4050 | 392 |

* составить системы нормальных уравнений:

для линейной функции система нормальных уравнений приметвид (линейная аппроксимация):



.



* решить систему уравнений:

получим коэффициенты C0=5.744 и C1=-0.442, тогда .



Для квадратичной функции система нормальных уравнений примет вид (квадратичная аппроксимация):



решая систему, получим коэффициенты C0=22.507, C1=-9.299иС3=0.974, тогда

.



* вычислить значения аппроксимирующих функций в узловых точках и занести эти значения в табл. 1.7-4:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 |
|  | 8 | 3 | 1 | 2 | 5 |
|  | 4.86 | 4.418 | 3.976 | 3.092 | 2.65 |
|  | 7.805 | 3.376 | 0.895 | 1.777 | 5.14 |
|  | 3.14 | -1.118 | -2.976 | -1.092 | 2.35 |
|  | 0.195 | -0.376 | 0.105 | 0.223 | -0.14 |

* оценить погрешность (среднеквадратическое отклонение):
* для линейной аппроксимации ,



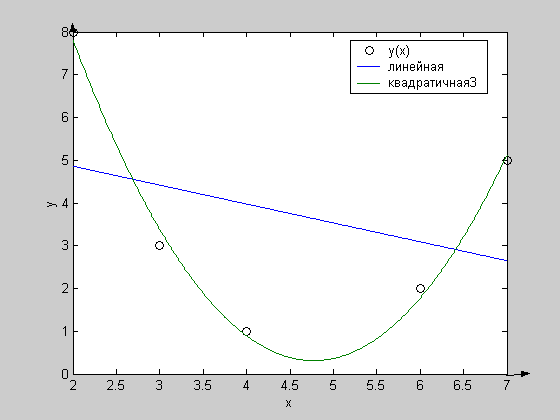
* для квадратичной аппроксимации



Приведенные расчеты показали, что для рассматриваемой функции предпочтительнее квадратичная аппроксимация, т.к. .



1. **Графики заданной и полученной функций**



### **1.7.6. Контрольные вопросы по теме**

### **Аппроксимация функций**

1. Что называется аппроксимацией функций?
2. Как называется функция, приближенно описывающая таблично заданную функцию?
3. Как называется полином, построенный по таблично заданной функции и обеспечивающий полное совпадение в используемых для его построения точках?
4. Какое минимальное количество узлов нужно для построения аппроксимирующего многочлена 2-й степени?
5. Каким полиномом проводится аппроксимация, если система нормальных уравнений содержит два уравнения?
6. Каким полиномом проводится аппроксимация, если система нормальных уравнений содержит три уравнения?
7. Для чего предназначен метод наименьших квадратов?
8. Как изменяется точность описания исходной функции аппроксимирующим многочленом, если увеличить число табличных значений функции?
9. Что служит критерием близости аппроксимируемой и аппроксимирующей функций при использовании метода наименьших квадратов?
10. Что показывает критерий аппроксимации?
11. Какой термин используется при решении задачи аппроксимации?
12. Можно ли аппроксимировать функцию, заданную таблицей из 20 точек, многочленом 2-й степени?
13. Из какого условия в методе наименьших квадратов определяются параметры

аппроксимирующей функции?

1. Что происходит с точностью аппроксимации с увеличением количества узлов

аппроксимации?

1. Когда используется метод наименьших квадратов для построения аппроксимирующей функции?
2. Что служит мерой погрешности аппроксимации в точке?
3. Как называется матрица системы нормальных уравнений?
4. Как выбирается степень аппроксимирующего полинома (m**)** в методе наименьших квадратов в соответствии с количеством узлов таблично заданной функции- (n)?
5. Чем являются элементы матрицы Грама?
6. Когда система нормальных уравнений имеет единственное решение?